確率統計レポート2

035760A：横田敏明

平成16年6月11日

問題

Pascal分布の確率関数は、次式で定義されている。

$$P(X=k)=\frac{1}{1+\mu}(\frac{\mu}{i+\mu})^k \qquad (\mu>0,k=0,1,2\cdots)$$

1. 確率変数であることを証明せよ。

2. 期待値を求めよ。

3. 分散を求めよ。

期待値と分散を求めるには、定義に従って求める方法と、特性関数による方法がある。

解答

証明
与式を0からμまで足して、1になれば良い。
$\frac{\mu}{1+\mu}=x$と置くと、$\frac{1}{1+\mu}=1-x$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(1-x)x^k$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1-k)\sum_{k=0}^{n}x^k$$

$\sum_{k=0}^{n}x^k$はxの等比数列の和なので$\frac{1-x^k}{1-x}$
与式$=\lim_{n\to\infty}(1-x)\frac{1-x^n}{1-x}$

$= \lim_{n\to\infty}(1-x^n)$
$0 < x < 1$ なので,
$= 1$

期待値

$$\lim_{n\to}\sum_{k=0}^{n} x_j w_j = \lim_{n\to}\sum_{k=0}^{n} k\frac{\mu}{1+\mu}(\frac{\mu}{1+\mu})^k$$

上記同様に $\frac{\mu}{1+\mu} = x$ とおくと
与式

$$\lim_{n\to\infty}(1-x)\sum_{k=0}^{n} kx^k$$

$$\sum_{k=0}^{n} kx_k = S$$

とおくと,

$$S = 1x + 2x^2 + \cdots + nx^n$$
$$xS = x^2 + x^3 + \cdots + (n-1)x^n + nx^{n+1}$$

より 2 式の両辺を引くと

$$(1-x)S = x + x^2 + x^3 + \cdots x^n - nx^{n+1}$$
$$= 1 + x + x^2 + \cdots x^n - nx^{n+1} - 1$$
$$= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - nx^{n+1} - 1$$

$n- > \infty$ とすると,

$$(1-x)S = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

したがって,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} k(1-x)x^k = \frac{x}{1-x} = \mu$$

分散

$$V[k] = E[k^2] - E[k]^2$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} k^2\frac{1}{1+\mu}(\frac{\mu}{1+\mu}^k) - \mu^2$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} k^2(1-x)x^k - \mu^2$$